

Inteiros algébricos e irracionalidade: uma abordagem via dinâmica discreta

Algebraic integers and irrationality: an approach through discrete dynamics

Enteros algebraicos e irracionalidad: un enfoque vía dinámica discreta

Ensino de Ciências & Matemática

ARAÚJO, Aldair Silva de

Universidade Federal do Piauí - UFPI

aldair.cta@gmail.com // <https://orcid.org/0009-0007-0176-0609>

VIEIRA, Arlane Manoel Silva

Universidade Federal do Maranhão - UFMA

arlane.silva@ufma.br // <https://orcid.org/0000-0002-1198-2957>

Resumo:

A irracionalidade de $\sqrt{2}$ constitui um tópico recorrente no currículo de Matemática, sendo tradicionalmente abordada por meio de demonstrações baseadas em argumentos de paridade. No entanto, estudos indicam que professores em formação apresentam dificuldades persistentes na compreensão da estrutura lógica dessas provas. Neste artigo, desenvolvemos uma abordagem alternativa via dinâmica discreta, inspirada na prova de Casás Ferrerño (2009, p.68), que interpreta a irracionalidade como consequência de uma tensão entre convergência analítica e estrutura aritmética: sob a hipótese de racionalidade, a iteração de uma contração linear gera uma sequência de números naturais estritamente positivos que, por contradição, converge para zero. A principal contribuição desse artigo é a generalização desse argumento para inteiros algébricos reais arbitrários, estabelecendo que todo inteiro algébrico real é inteiro ou irracional. A abordagem unifica casos antes tratados separadamente, possibilita a visualização geométrica via diagramas cobweb e oferece contribuição ao Conhecimento Especializado do Conteúdo na formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Polinômios mônicos; Sequências; Contração linear; Prova por contradição.

Abstract:

The irrationality of $\sqrt{2}$ is a recurring topic in the Mathematics curriculum, traditionally addressed through proofs based on parity arguments. However, studies indicate that pre-service teachers face persistent difficulties in understanding the logical structure of these proofs. In this article, we develop an alternative approach via discrete dynamics, inspired by the proof by Casás Ferrerño (2009, p.68), which interprets irrationality as a consequence of a tension between analytical convergence and arithmetic structure: under the hypothesis of rationality, the iteration of a linear contraction generates a sequence of strictly positive natural numbers that, by contradiction, converges to zero. The main contribution of this article is the generalization of this argument to

arbitrary real algebraic integers, establishing that every real algebraic integer is either an integer or irrational. The approach unifies cases previously treated separately, enables geometric visualization via cobweb diagrams, and contributes to Specialized Content Knowledge in mathematics teacher education.

Keywords: Monic polynomials; Sequences; Linear contraction; Proof by contradiction].

Resumen:

La irracionalidad de $\sqrt{2}$ constituye un tema recurrente en el currículo de Matemáticas, siendo abordada tradicionalmente mediante demostraciones basadas en argumentos de paridad. No obstante, diversos estudios indican que los profesores en formación presentan dificultades persistentes en la comprensión de la estructura lógica de estas pruebas. En este artículo, desarrollamos un enfoque alternativo mediante la dinámica discreta, inspirado en la prueba de Casás Ferreño (2009, p.68), que interpreta la irracionalidad como consecuencia de una tensión entre la convergencia analítica y la estructura aritmética: bajo la hipótesis de racionalidad, la iteración de una contracción lineal genera una sucesión de números naturales estrictamente positivos que, por contradicción, converge a cero. La principal contribución de este artículo es la generalización de este argumento para enteros algebraicos reales arbitrarios, estableciendo que todo entero algebraico real es entero o irracional. El enfoque unifica casos antes tratados por separado, permite la visualización geométrica a través de diagramas de telaraña (cobweb) y ofrece una contribución al Conocimiento Especializado del Contenido en la formación de profesores de Matemáticas.

Palabras claves: Polinomios mónicos; Sucesiones; Contracción lineal; Prueba por contradicción.

INTRODUÇÃO

Ao longo da história, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ tem recebido tratamentos variados, cada qual iluminando aspectos distintos da estrutura matemática envolvida. A demonstração clássica, associada à tradição euclidiana e fundamentada em argumentos de paridade, consolidou-se como paradigma de prova por contradição. Outras formulações passaram a integrar o debate, explorando recursos geométricos, algébricos e dinâmicos (Ávila, 1986, p.4; Possani, 2006, p.57; Ferreño, 2009, p.68).

A passagem dos números racionais para os irracionais impõe uma ruptura conceitual profunda. A crença na comensurabilidade universal das grandezas resiste à ideia de que certos comprimentos não admitem medida comum, constituindo um obstáculo epistemológico relevante

na formação matemática (Bachelard, 1996, p.17). Compreender a irracionalidade exige acompanhar a lógica interna que sustenta a impossibilidade aritmética, o que demanda domínio estrutural da argumentação.

Nesse contexto, o domínio conceitual do professor assume papel decisivo. O modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), formulado por Ball, Thames e Phelps (2008, p.390), distingue entre o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado necessário à prática docente. Saber que $\sqrt{2}$ é irracional constitui apenas um ponto de partida. A atuação qualificada requer capacidade de explicitar a arquitetura da demonstração, reorganizar argumentos e interpretar representações diversas.

A discussão sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$ é recorrente na literatura da Revista do Professor de Matemática. Ávila (1986, p.5) examina a noção de incomensurabilidade em sua dimensão histórica, enquanto Possani (2006, p.57) apresenta uma demonstração geométrica inspirada na tradição clássica. Sob perspectiva algébrica, Andrade (1991, p.14) e Tamarozzi (2001, p.42) investigam a irracionalidade por meio das propriedades de polinômios com coeficientes inteiros e do Teorema das Raízes Racionais, destacando o papel desses instrumentos na análise da racionalidade.

Estudos recentes em Educação Matemática indicam que, apesar da presença recorrente da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ no currículo, trata-se de conteúdo conceitualmente delicado. Mathias, Doering e Ripoll (2020, p.738) analisam produções de professores da Educação Básica em formação continuada e identificam fragilidades persistentes na argumentação e na escrita matemática associadas a esse resultado. As autoras evidenciam dificuldades relacionadas à organização lógica do texto demonstrativo, ao uso rigoroso da linguagem matemática e à explicitação adequada de hipóteses e conclusões, inclusive entre docentes experientes. Tal constatação aponta para lacunas no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), reforçando a necessidade de abordagens que tornem explícita a estrutura lógica das demonstrações.

Nesse movimento de ampliação argumentativa e fortalecimento do Conhecimento Matemático para o Ensino, destaca-se a prova proposta por Casás Ferreño (2009, p.68), que interpreta a irracionalidade de $\sqrt{2}$ por meio da iteração de uma aplicação linear contrativa. O núcleo do argumento reside na incompatibilidade entre a convergência de uma órbita real para zero e sua permanência no conjunto dos números naturais sob a hipótese de racionalidade. Essa perspectiva estabelece articulação fecunda entre dinâmica discreta, sequências e estruturas algébricas associadas a polinômios com coeficientes inteiros.

O objetivo principal deste artigo consiste em desenvolver, de forma sistemática e detalhada, a generalização dessa abordagem para inteiros algébricos reais definidos como raízes de polinômios mônicos com coeficientes inteiros. Embora esse resultado decorra diretamente do Teorema das Raízes Racionais, a abordagem dinâmica oferece interpretação alternativa fundada no comportamento assintótico de órbitas. Como caso particular e motivador, rerepresentamos a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ proposta por Casás Ferreño (2009, p.68), organizando-a com ênfase na estrutura interna do argumento e nos passos essenciais que sustentam a prova.

Para atingir esses objetivos, a pesquisa adota uma abordagem metodológica de natureza teórico-dedutiva. Parte-se da análise detalhada da prova proposta por Casás Ferreño (2009, p.68) para $\sqrt{2}$, dissecando sua estrutura em três etapas fundamentais: (i) a construção de uma aplicação linear contrativa a partir do número; (ii) a iteração dessa aplicação para gerar uma sequência; e (iii) a demonstração de que, sob a hipótese de racionalidade, essa sequência é composta exclusivamente por números naturais, criando um paradoxo com sua convergência para zero. A seguir, o método é generalizado. Para um inteiro algébrico real α qualquer, a metodologia consiste em utilizar seu polinômio mínimo para estabelecer uma relação de recorrência que permite escrever qualquer potência α^j como uma combinação linear de potências inferiores com coeficientes inteiros. Essa redução algébrica é a chave para, então, adaptar o argumento dinâmico, iterando a parte fracionária de α e provando que a racionalidade levaria, novamente, à contradição da sequência de inteiros positivos convergente. A validação da prova se dá pela solidez lógica de seus passos, que serão apresentados de forma detalhada e didática.

UMA PROVA DINÂMICA DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

Nesta seção, apresentamos a prova dinâmica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ proposta por Casás Ferreño (2009, p.68), destacando sua estrutura algébrica essencial. Considere a aplicação linear $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (\sqrt{2} - 1)x$. Como $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, trata-se de uma contração estrita. Assim, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f^n(x_0) = (\sqrt{2} - 1)^n x_0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0.$$

Suponha, por absurdo, que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{mdc}(p, q) = 1.$$

Definamos

$$a_n = (\sqrt{2} - 1)^n q.$$

Mostremos que a_n é inteiro. Para todo $k \geq 0$,

$$(\sqrt{2})^k q \in \mathbb{Z},$$

pois, se $k = 2m$, então $(\sqrt{2})^{2m} q = 2^m q$ e, se $k = 2m + 1$, então $(\sqrt{2})^{2m+1} q = 2^m p$. Pelo binômio de Newton,

$$(\sqrt{2} - 1)^n q = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{2})^k (-1)^{n-k} q,$$

e cada parcela da soma é um inteiro. Logo,

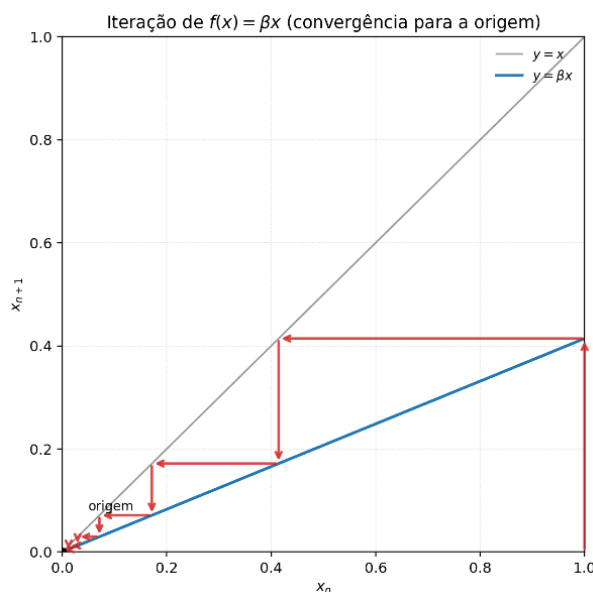
$$a_n \in \mathbb{Z} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Como $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, temos ainda $a_n > 0$. Portanto,

$$a_n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Isso é impossível, pois uma sequência de naturais estritamente positivos não pode convergir para zero. Conclui-se, assim, que $\sqrt{2}$ é irracional. A convergência da sequência (a_n) para zero decorre da natureza contrativa da aplicação f . Esse comportamento pode ser visualizado geometricamente por meio do diagrama cobweb, apresentado na Figura 1. A representação gráfica explicita o mecanismo iterativo: cada aplicação de f produz um termo menor que o anterior, aproximando progressivamente a órbita da origem.

Figura 1: Gráfico cobweb da iteração $x_{n+1} = \beta x_n$ associada à aplicação $f(x) = \beta x$, com $0 < \beta < 1$. As abscissas x_1, x_2, x_3 indicam os iterados no eixo x .



Fonte: Autor, 2026.

A leitura do gráfico permite identificar dois aspectos fundamentais do argumento. Primeiro, a contração linear garante que a órbita de qualquer ponto inicial positivo permanece positiva e converge monotonamente para zero. Segundo essa convergência é independente de qualquer consideração aritmética sobre $\sqrt{2}$; trata-se de propriedade puramente analítica da aplicação. No contexto da formação docente, essa articulação entre argumento formal e representação gráfica amplia o repertório explicativo do professor, permitindo que a prova seja apresentada como integração entre dinâmica discreta, estrutura algébrica e raciocínio lógico.

UMA DEMONSTRAÇÃO GERAL PARA INTEIROS ALGÉBRICOS REAIS

Estendemos o argumento dinâmico anterior a um inteiro algébrico real arbitrário. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um inteiro algébrico de grau $k \geq 1$. Por definição, α é raiz de um polinômio mônico com coeficientes inteiros,

$$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Da igualdade $P(\alpha) = 0$, segue que

$$\alpha^k = -a_{k-1}\alpha^{k-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0. \quad (1)$$

A identidade (1) permite reduzir potências de grau k a combinações lineares de potências de grau menor. Vamos provar por indução que, para todo $j \geq 0$,

$$\alpha^j = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} \alpha^i, \quad \text{com } c_{j,i} \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Passo inicial. Se $0 \leq j \leq k-1$, basta tomar $c_{j,i} = \delta_{i,j}$ (delta de Kronecker). Assim,

$$\alpha^j = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{j,i} \alpha^i,$$

e (2) vale para todo $j < k$. O caso $j = k$ segue da relação (1).

Passo indutivo. Suponha que (2) valha para todos os expoentes $0 \leq r \leq j$, onde $j \geq k + 1$. Vamos mostrar que (2) vale para $j + 1$. Escrevemos

$$\alpha^{j+1} = \alpha^{j+1-k} \alpha^k.$$

Substituindo α^k pela expressão dada em (1), obtemos

$$\alpha^{j+1} = \alpha^{j+1-k} (-a_{k-1} \alpha^{k-1} - \dots - a_1 \alpha - a_0) = - \sum_{t=0}^{k-1} a_t \alpha^{j+1-k+t}. \quad (3)$$

Observe que os expoentes $j + 1 - k + t$ pertencem ao intervalo $[j + 1 - k, j]$. Como $j \geq k - 1$, temos $j + 1 - k \geq 0$, e, portanto, cada termo $\alpha^{j+1-k+t}$ tem expoente $\leq j$. Pela hipótese de indução, para cada $t \in \{0, \dots, k - 1\}$ existem inteiros $c_{j+1-k+t,i}$ tais que

$$\alpha^{j+1-k+t} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+1-k+t,i} \alpha^i.$$

Substituindo isso em (3),

$$\alpha^{j+1} = - \sum_{t=0}^{k-1} a_t \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+1-k+t,i} \alpha^i = \sum_{i=0}^{k-1} \left(- \sum_{t=0}^{k-1} a_t c_{j+1-k+t,i} \right) \alpha^i.$$

Definindo

$$c_{j+1,i} := - \sum_{t=0}^{k-1} a_t c_{j+1-k+t,i} \in \mathbb{Z},$$

concluimos que

$$\alpha^{j+1} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j+1,i} \alpha^i,$$

isto é, (2) vale para $j + 1$.

Suponha agora que $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Multiplicando (2) por q^{k-1} , obtemos

$$\alpha^j q^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} \alpha^i q^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} \left(\frac{p}{q}\right)^i q^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} c_{j,i} p^i q^{k-1-i}.$$

Como $k - 1 - i \geq 0$, cada parcela $p^i q^{k-1-i}$ é um número inteiro. Logo,

$$\alpha^j q^{k-1} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } j \geq 0. \quad (4)$$

Para concluir, seja $m = [\alpha]$ a parte inteira de α , e defina a parte fracionária $\beta = \alpha - m$. Se $\beta = 0$, α é um número inteiro e a demonstração está concluída. Assumiremos, portanto, que $0 < \beta < 1$.

Considere a aplicação $f(x) = \beta x$. Como $0 < \beta < 1$, trata-se de contração estrita. Escolha $x_0 = q^{k-1}$ e defina

$$b_n = f^n(x_0) = \beta^n q^{k-1}.$$

Expandindo $\beta^n = (\alpha - m)^n$ pelo binômio de Newton,

$$b_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha^j (-m)^{n-j} q^{k-1}.$$

Pela relação (4), cada termo $\alpha^j q^{k-1}$ é inteiro; como $\binom{n}{j}$ e $(-m)^{n-j}$ também o são, conclui-se que

$$b_n \in \mathbb{Z} \text{ para todo } n \geq 0.$$

Além disso, como $\beta > 0$, temos $b_n > 0$. Por outro lado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n q^{k-1} = 0.$$

Obtém-se, assim, uma sequência de inteiros positivos que converge para zero, o que é impossível. A hipótese de racionalidade deve ser rejeitada. Conclui-se, portanto, que todo inteiro algébrico real é inteiro ou irracional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo revisitou a prova dinâmica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ proposta por Casás Ferreño (2009, p.68), organizando seus elementos de modo a explicitar sua engenhosidade algébrica. A principal contribuição foi a generalização desse esquema para a classe dos inteiros algébricos reais, demonstrando de forma unificada que todo número dessa natureza é inteiro ou irracional. A abordagem apresentada transcende a prova clássica por paridade, evidenciando uma rica interação entre a redução algébrica de potências (via polinômio mínimo) e o comportamento assintótico de

seqüências geradas por contrações lineares. Essa combinação não apenas prova o resultado, mas oferece uma leitura estrutural do mesmo, permitindo visualizar geometricamente, por meio de diagramas cobweb, a convergência que leva à contradição.

No contexto da formação de professores, a explicitação desse encadeamento lógico contribui significativamente para o fortalecimento do Conhecimento Especializado do Conteúdo (Ball et al., 2008, p.400). Ao ampliar o repertório demonstrativo disponível, a prova dinâmica oferece ao professor uma ferramenta adicional para analisar a organização interna das provas, discutir a incomensurabilidade sob uma nova perspectiva e abordar as dificuldades de aprendizagem identificadas em estudos como o de Mathias, Doering e Ripoll (2020, p.738).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, Lenimar Nunes de Andrade. Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. **Revista do Professor de Matemática**, n. 14, SBM, 1991. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/14/8.htm>. Acesso em: 30 dez. 2025.

ÁVILA, Geral Ávila. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. **Revista do Professor de Matemática**, n. 5, SBM, 1986. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/5/3.htm>. Acesso em: 30 dez. 2025.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: what makes it special?. **Journal of Teacher Education**, Thousand Oaks, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov./dez. 2008. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/0022487108324554>. Acesso em: 28 fev. 2026.

FERREÑO, Natalia Casás. Yet another proof of the irrationality of $\sqrt{2}$. The **American Mathematical Monthly**, v. 116, n. 1, p. 68-69, 2009.

MATHIAS, Carmen Vieira; DOERING, Luisa Rodríguez; RIPOLL, Cydara Cavedon. Uma Reflexão de Professores sobre Demonstrações Relativas à Irracionalidade de 2. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, p. 719-739, 2020.

POSSANI, Cláudio Possani. Uma demonstração geométrica que raiz de dois é irracional. **Revista do Professor de Matemática**, n. 57, SBM, 2006. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/57/3.htm>. Acesso em: 30 dez. 2025.

TAMAROZZI, Antonio Carlos Tamarozzi. Identificando números irracionais através de polinômios. **Revista do Professor de Matemática**, n. 42, SBM, 2001. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/42/5.htm>. Acesso em: 30 dez. 2025.