ISSN 2447-5777

ENSINO & MULTIDISCIPLINARIDADE

Jul. | Dez. 2018 – Volume 4, Número 2, p. 15-32.

O método da indução nas ciências empíricas e na Matemática visto em livros didáticos

The induction method in empiric sciences and Mathematics seen in textbooks

Jeremias Stein Rodriguês[1] - https://orcid.org/0000-0002-7869-5856
David Antonio da Costa[2] - https://orcid.org/0000-0003-4493-9207
José Francisco Custódio[3] - https://orcid.org/0000-0003-3835-8086

[1] Doutorando em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor de Matemática no Instituto Federal de Santa Catarina (IFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: jeremias.stein@ifsc.edu.br.
[2] Doutor em Educação Matemática pela Pontifica Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professor adjunto da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: david.costa@ufsc.br
[3] Doutor em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor adjunto da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. E-mail: j.custodio@ufsc.br

Resumo

A generalização de um padrão ou de um fenômeno observados no cotidiano, no ambiente escolar ou na ciência pode ser utilizada e ensinada como proposta de método de ensino de conhecimento científico. Dessa forma, buscamos evidenciar dois métodos indutivos distintos, desenvolvidos na área das Ciências e da Matemática, assim como suas características, particularidades e diferenças. Do mesmo modo, que procuramos verificar se é possível encontrar aspectos de tais tipos de métodos científicos a partir de uma análise bibliográfica em dois livros didáticos do Ensino Fundamental que levam a discussão acerca da construção do conhecimento científico. Para isso, foram utilizados dois livros do nono ano do Ensino Fundamental, sendo um de cada disciplina. Nos dois livros didáticos analisados foram encontradas perspectivas do método indutivo utilizado na respectiva área do conhecimento, todavia, não exatamente da forma como tais métodos são propostos para o desenvolvimento das ciências.

Palavras-chave: Método indutivo. Experimentação. Indução empírica. Indução matemática.

Abstract

Como citar: RODRIGUÊS, J. S.; COSTA, D. A.; CUSTÓDIO, J. F. O método da indução nas ciências empíricas e na Matemática visto em livros didáticos. **Ensino e Multidisciplinaridade**, v. 4, n. 2, 15-32, 2018.

Este é um artigo publicado em acesso aberto (*Open Access*) sob a licença *Creative Commons Attribution*, que permite uso, distribuição e reprodução em qualquer meio, sem restrições desde que o trabalho original seja corretamente citado.

The generalization of a pattern or phenomenon observed in the everyday life, school environment or science can be used and taught as a method proposed for the teaching of scientific knowledge. Thus, we sought to highlight two distinct inductive methods, developed in the area of Sciences and Mathematics, as well as their characteristics, particularities and differences, in the same way that we sought to verify if it is possible to find aspects of such scientific methodologies, from of a bibliographic analysis, in textbooks of the Middle School. For this, two books of the ninth year of primary school were used, form each discipline. In both textbooks, perspectives of the inductive method used in the respective area of knowledge were found, however, not exactly in the way such methods are proposed for the development of the sciences.

Keywords: Inductive method. Experimentation. Empirical induction. Mathematical induction.

Introdução

Desde muito tempo o homem busca por padrões para poder construir explicações sobre o mundo. Tal anseio se dá pela busca de conhecimento, para entender como e por que certos eventos ocorrem. Na história, constatamos que tal busca levou à construção do conhecimento científico e ao desenvolvimento da ciência como instituição. Baseada na observação, ou seja, em nossos sentidos, a generalização sempre foi uma ferramenta intelectual importante nessa busca. Ela é um argumento utilizado por diversas pessoas, seja no cotidiano de um trabalhador, no dia a dia de um estudante ou por alguém do meio acadêmico. No entanto, qual sua validade na perspectiva de construção do conhecimento científico? Tal método realmente pode estar presente no dia a dia de um estudante?

De forma geral, o método de generalização é chamado de *método de indução*, ou *método indutivo*, que se refere a buscar conclusões a partir de repetidas observações de algum fenômeno. Tal método, assim como tantos outros, já fora visto como método único e exato para a determinação do conhecimento científico, mas, principalmente depois do trabalho de Francis Bacon (2003), sofreu muitas críticas uma vez que suas falhas começaram a ser criticadas pela comunidade acadêmica.

No entanto, o método de indução não é único e igual em todas as ciências. Assim, a fim de evitar confusões, chamaremos de *indução empírica*[1] o método da indução utilizada em ciências como Biologia, Física e Química, e chamaremos de *indução matemática*[2] o método de indução utilizado na Matemática. Tais métodos possuem distinções, por vezes gerando confusão quanto à validade de seu uso na construção do conhecimento científico. Dessa forma, tentamos caracterizar cada um dos métodos de modo a tornar claro como estes são utilizados, suas semelhanças e distinções, assim como a sua aceitação na comunidade científica.

Por fim, buscamos propostas com a apresentação de aspectos destes métodos em livros didáticos, de Ciências e de Matemática, para assim discutir como podem ser utilizadas em sala de aula durante a construção do conhecimento pelo aluno[3]. Tal análise seguiu uma perspectiva qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2003), em que a própria teoria acerca dos métodos de indução guiou a busca por situações em que estes métodos, ou aspectos destes, fossem empregados no livro didático para posterior análise.

---

[1] O chamaremos assim por se basear na observação de dados empíricos.

[2] Por vezes chamada de princípio da indução finita ou apenas indução.

[3] É importante destacar que a pesquisa por possíveis trabalhos que abordam o uso do método indutivo, ou generalização, em livros didáticos no catálogo de teses e dissertações da Capes (disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses), nos levou ao trabalho "Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental" (CARMO, 2014). Mas não foram encontrados trabalhos da mesma linha nas Ciências. No entanto, não nos debruçamos sobre a publicação de trabalhos na forma de artigos em periódicos.

A caracterização dos métodos de indução: a indução empírica

A generalização de observações feitas está presente desde os primórdios da história humana. Seja constatando que no raiar do sol o céu volta a se tornar claro e que volta a escurecer quando este se põe, permitindo chamar estes períodos de dia e noite; seja percebendo que durante um período de tempo o clima varia, de forma a determinarmos as quatro estações; ou ainda que durante certa estação algumas espécies de animais migram devido ao clima. Tais exemplos, baseados na observação dos eventos ao nosso redor e de seu padrão de repetição, nos mostram que o raciocínio indutivo já existia mesmo antes de se tornar científico[4] tal método de pesquisa.

Francis Bacon (1561-1626) foi um dos filósofos que buscou tornar a generalização um método de pesquisa científica e padrão para delimitar o que é o conhecimento produzido cientificamente. A indução empírica seria um método capaz de conceder caráter científico a qualquer área de conhecimento, uma vez que "Do mesmo modo que a lógica vulgar, que ordena tudo segundo o silogismo, aplica-se não somente às ciências naturais, mas a todas as ciências, assim também a nossa lógica, que procede por indução, tudo abarca" (BACON, 2003, p. 71).

A busca de Bacon pelo método de indução empírica se deu pelo descontentamento do filósofo com os métodos de pesquisa científica precedentes, uma vez que era "a grande e perpétua disparidade de ideias que tem reinado entre os filósofos, e a própria variedade das escolas de filosofia" (Ibidem, p. 35). De acordo com Galvão (2007, p. 33), seria necessária uma revolução nos métodos de pesquisa científica e no pensamento da época, de modo que um método mais apropriado era imprescindível, algo que também buscasse superar os bloqueios da mente humana. Assim, "o único método que poderia ajudar o homem a dominar a natureza, segundo Bacon, seria o método empírico indutivo" (Ibidem, p. 34). Oliva reforça esta ideia: "Francis Bacon estava fortemente convencido de que suas contribuições ao estudo lógico da inferência indutiva tornariam a descoberta científica independente da 'acuidade e força da imaginação'" (OLIVA, 1990, p. 16).

Duas críticas muito relevantes são apresentadas por Bacon (2003) em sua obra, uma contra o método de pesquisa científica puramente metafísico e a indução que procede apenas da enumeração de casos de repetição. Com efeito, "a indução[5] que procede por simples enumeração é uma coisa pueril, leva a conclusões precárias, expõe-se ao perigo de uma instância que a contradiga" (Ibidem, p. 56). A indução criticada por Bacon é aquela da generalização direta, dada pela enumeração de uma dada quantidade de observações e pela proposição de uma regra geral, propensa ao erro por não considerar ou avaliar casos que contradizem a generalização estabelecida. Um exemplo muito conhecido deste método indutivo é a observação de que em um grupo de cisnes/corvos, seguida da constatação de que todos são brancos/pretos, assim levando a conclusão de que todos os cisnes/corvos são brancos/pretos. Para Bacon, tal método está fadado ao erro, uma vez que não se considera a possibilidade de um dia ser encontrado um cisne preto ou um corvo branco. Na perspectiva do autor, "[...] a indução que será útil para a descoberta e demonstração das ciências e das artes deve analisar a natureza, procedendo às devidas rejeições e exclusões, e depois, então, de posse dos casos negativos necessários, concluir a respeito dos casos positivos" (Ibidem, p. 56).

Bacon propõe, então, um método de pesquisa que se baseia na experimentação e na observação, em detrimento da metafísica, que busca por padrões e em quais momentos estes falham. Assim, "Bacon e muitos de seus contemporâneos sintetizaram a atitude científica da

[4] Consideramos tornar científico o processo de se estipular como o procedimento deve ser efetuado, aplicado, etc., ou seja, tornar padrão o processo de indução, com regras e restrições, sendo assim aceito pela comunidade acadêmica.

[5] Método indutivo proposto por Aristóteles.

época ao insistirem que, se quisermos compreender a natureza, devemos consultar a natureza e não os escritos de Aristóteles[6]" (CHALMERS, 1993, p. 24). No entanto, isto não significa que a metafísica não se faça presente no método de Bacon. Segundo Zaterka (2012), a indução proposta por Bacon seria metafísica uma vez que busca o acesso à natureza por meio de tábuas, constituídas como parte do processo de seu método indutivo, que assumiriam tal caráter metafísico. Assim, para Bacon o domínio do conhecimento permite o desenvolvimento da indução empírica, uma vez que o autor pressupõe que no método devem ser levantados os diversos fatores que, de alguma forma, se relacionam ou influenciam o evento estudado. Sendo assim, o conhecimento seria uma ferramenta para o pesquisador dominar a natureza e a estudar.

O método de Bacon prevê ainda como seria o papel do pesquisador para o desenvolvimento (correto) do conhecimento científico. Para ele, em uma investigação que se embasa na experiência e nos sentidos, os preconceitos e as vivências de cada um exigem uma busca por uma observação mais pura, sem que estas sofram influências do pesquisador. Nesse sentido, Bacon caracteriza quatro gêneros de ilusão cognitiva[7], chamados de *ídolos*, que obscurecem a mente do pesquisador quanto a verdade que se procura.

> Os ídolos e noções falsas que ora ocupam o intelecto humano e nele se acham implantados não somente o obstruem a ponto de ser difícil o acesso da verdade, como, mesmo depois de seu pórtico logrado e descerrado, poderão ressurgir como obstáculo à própria instauração das ciências, a não ser que os homens, já precavidos contra eles, se cuidem o mais que possam (BACON, 2003, p. 14).

Os quatro ídolos definidos por Bacon (2003) são os *ídolos da tribo*, *ídolos da caverna*, *ídolos do foro* e *ídolos do teatro*. Cada *ídolo* está relacionado com alguma característica humana, considerada por Bacon como um fator que pode influenciar negativamente o desenvolvimento da ciência, uma vez que tais influências tornam o processo algo não objetivo, carregado pelas subjetividades vinculadas a cada *ídolo*.

Nos *ídolos da tribo*, temos a natureza humana como obstáculo, uma vez que nossas concepções e atitudes podem nos desviar do caminho da verdade. Nos *ídolos da caverna*, o autor destaca o obstáculo que é a história de cada sujeito, uma vez que a vivência de cada um também pode influenciar na sua observação, seu pensamento, suas concepções e conclusões. Nos *ídolos do foro*, a relação dos homens também é vista como um obstáculo, principalmente as palavras, uma vez que "as palavras, impostas de maneira imprópria e inepta, bloqueiam espantosamente o intelecto" (Ibidem, p. 15). Por fim, nos *ídolos do teatro*, que as verdades absolutas, ditadas por dogmas, tradição, fé ou negligência, seriam outra ilusão para a mente humana, não nos permitindo ver a realidade como ela é. Para este mesmo autor, é pela indução empírica que o pesquisador afasta tais ídolos, o que pode parecer um pouco contraditório, uma vez que o autor também acredita que o pesquisador precisa abrir mão de tais ídolos para o verdadeiro desenvolvimento do conhecimento científico.

Bacon acreditava então que se o processo de construção do conhecimento, ou seja, a indução empírica for contaminada pelas influências da mente, os *ídolos*, o resultado encontrado será algo diferente da verdade buscada, pois este foi influenciado por aspectos subjacentes ligados ao pesquisador. Assim, na visão de Bacon, "com o afastamento dos 'ídolos', das noções falsas, seria possível alcançar a observação pura e neutra sobre a natureza, a única capaz de propiciar a efetiva explicação dos fenômenos" (SILVA, 2008, p. 5). Na perspectiva de Bacon, o desenvolvimento da ciência deveria ser puramente objetivo, sem influências do sujeito conhecedor, seu contexto ou suas crenças. No decorrer da história, Bacon foi muito criticado,

[6] Chalmers (1993) indica que Bacon dava maior importância para a natureza do que para o método de pesquisa de Aristóteles. A própria obra "Novum Organum", de Bacon, foi feita para contrapor o "Organon" de Aristóteles.
[7] O termo foi apresentado por Oliva (1990, p. 22).

uma vez que se entende que não é possível ao pesquisador se afastar de tais *ídolos* de forma absoluta.

No entanto, o método de Bacon não se baseava apenas na experimentação, observação dos casos positivos, estudo dos casos negativos e do afastamento do sujeito do conhecimento dos seus *ídolos*. Bacon ainda argumenta sobre a necessidade de se construir tábuas com instâncias do evento, sua presença, ausência e grau, de forma que estas contribuam no processo de indução.

> Na tábua de essência e de presença, deveriam ser anotados todos os casos possíveis em que um fenômeno, objeto de estudo, aparece. [...] Antagonicamente, a tábua de desvio ou de ausência de fenômenos próximos destinava-se a verificar os casos semelhantes em que o fenômeno não ocorre. Por fim, tornava-se necessário anotar a intensidade na ocorrência do fenômeno, "descobrindo-se" as correlações entre as modificações; a essa tábua dá-se o nome de tábua de graus ou de comparação. Os experimentos desenvolvidos, independentemente de serem classificados como lucíferos ou frutíferos, deveriam ser registrados nessas tábuas (RAICIK, PEDUZZI, ANGOTTI, 2018, p. 115).

Por mais que a metafísica não seja considerada por Bacon como a forma de se fazer ciência, podemos notar indícios de que o conhecimento e a filosofia se fazem presentes no processo de construção de tais tábuas. Ademais, também podemos notar que o método de Bacon considera, para além da repetição e análise de um fenômeno diversas vezes, a observação de um fenômeno em diferentes circunstâncias. Tais características do método buscam evitar generalizações apressadas e, como apontado na citação anterior, a correlação das observações que contribuem para a posterior construção do conhecimento científico.

Na segunda parte de sua obra, Bacon apresentou vinte e sete prerrogativas do seu método experimental e, após desenvolver tábuas "dispostas de tal modo que o intelecto com elas possa operar" (BACON, 2003, p. 82), deveria se recorrer a outras técnicas de indução.

> Esses recursos seriam: as instâncias prerrogativas, os adminículos (auxílios) da indução, a retificação da indução, a variação da investigação segundo a natureza do assunto, as prerrogativas da natureza, os limites da investigação, a dedução e a prática, os preparativos para a investigação e, por último, a escala ascendente e descendente dos axiomas (RAICIK, PEDUZZI, ANGOTTI, 2018, p. 115).

O método de pesquisa científica de Bacon viria a se instaurar como uma sequência de procedimentos, dados por:

> [...] eliminar os obstáculos para instauração das ciências, que são os ídolos; o conhecimento da forma, ou seja, de sua estrutura e da lei que regula o seu processo; organização de um registro, o mais completo possível, da história do fenômeno ou natureza estudados, feita por meio das tábuas de presença, de ausência e de graus; enunciado de uma primeira hipótese explicativa provisória ou primeira vindima; teste da hipótese por meio das instâncias prerrogativas; e, por último, confirmação ou não da hipótese, se não for confirmada, retoma o processo do método indutivo (SILVA, 2008, p. 16).

Por mais que a filosofia de Bacon tenha sido aceita por muito tempo, com um grande número de seguidores não apenas na sua época, filósofos como Bachelard[8] e Popper[9] vêm criticar sua perspectiva metodológica e de filosofia da ciência. A perspectiva da curiosidade científica, aspecto muito ligado à ciência nos dias de hoje, se perde no método de Bacon, uma vez que este "supunha que a acumulação de dados empíricos deve levar automaticamente à descoberta dessas uniformidades naturais buscadas pela ciência. A função da ciência consistiria em juntar experimento com experimento e registrar os resultados [...]" (WRIGHT[10], 1951 apud OLIVA, 1990, p. 16).

Outra crítica apresentada para a teoria elaborada por Bacon (2003) é quanto à omissão do autor em apresentar uma proposta para o desenvolvimento da ciência em um âmbito metafísico. Assim como Laudan (2011, p. 5) indica que Rudolf Carnap teria admitido que seu sistema de lógica indutiva não seria adequado para lidar com diversos momentos da história das ciências, Bacon estaria fazendo o mesmo ao se debruçar apenas sobre o real e palpável. Segundo Carnap, como exemplo, "[...] não podemos aplicar a lógica indutiva à teoria da relatividade geral de Einstein a fim de obter um valor numérico para o grau de confirmação desta teoria. [...] uma aplicação da lógica indutiva a esses casos está fora de cogitação" (1962, p. 243 apud LAUDAN, 2011, p. 5).

Ainda assim, é importante destacar que a obra de Bacon não trouxe apenas uma grande revolução na ciência da época, mas também podemos encontrar perspectivas de seu método em algumas formas de se fazer ciência nos dias de hoje. Nos estudos da filosofia das ciências, Bacon permite ainda um contraponto com epistemologias que surgem após seu tempo, assim como podemos encontrar contribuições do autor nestas.

A caracterização dos métodos de indução: a indução matemática

Uma das principais diferenças presentes entre a Matemática e as outras ciências da natureza, ou ciências exatas e da terra, são os objetos de estudo de cada área. Enquanto nas ditas ciências da natureza os objetos do conhecimento estão presentes na própria natureza, perceptíveis a observação ou não, como a chuva, gravidade ou organismos, os objetos matemáticos são totalmente teóricos ou formais.

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação (DUVAL, 2008, p. 21).

O que Duval quer indicar é que os objetos matemáticos só se fazem presentes, ou seja, deixam o âmbito das ideias para que tenhamos acesso a eles por meio dos registros de representação desse objeto. Segundo Damm, "Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa sem o auxílio de uma representação" (2002, p. 137). Por exemplo, o objeto "circunferência centrada na origem e de raio dois" (registro escrito/língua natural) pode também ser representado por "$x^2 + y^2 = 4$" (registro algébrico) ou ainda pelo desenho de tal objeto no plano cartesiano (registro gráfico), sendo que só o podemos manipular

[8] Bachelard cita que "Nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do geral, que dominou de Aristóteles a Bacon, inclusive, e que continua sendo, para muitos, uma doutrina fundamental do saber" (BACHELARD, 1996, p. 69).

[9] Popper acredita que "um princípio da indução é supérfluo e deve conduzir a incoerências lógicas" (POPPER, 1972, p. 29). Popper então propõe um método dedutivo para o desenvolvimento da ciência.

[10] G. H. Von Wright. A Treatise on Induction and Probability. Londres. Routledge and Kegan Paul. 1951. p. 19.

se fizermos uso desses, ou de outros, registros do objeto. Duval ainda nos diz que tais representações só nos permitem acesso as partes/conteúdos do objeto representado, não devendo o objeto jamais ser confundido com sua representação, uma vez que este é inteiramente conceitual.

Dessa forma, o método de Bacon não pode ser aplicado da forma proposta na Matemática, já que seus objetos e fenômenos não são perceptíveis aos sentidos humanos da mesma forma que o método prevê. Assim, o desenvolvimento do conhecimento matemático deve-se fazer por formas diferentes de alguns dos métodos aplicáveis nas ciências empíricas, isso ocorre com relação a indução. No entanto, cabe ressaltar que alguns aspectos do desenvolvimento do conhecimento matemático se dão em perspectivas apoiadas por Bacon, por exemplo, em um nível superficial, o desenvolvimento da matemática não é afetado por subjetividades referentes ao pesquisador, uma vez que suas opiniões e crenças não são consideradas no momento em que propõe um novo resultado ou teoria, ou seja, uma vez demonstrado verdadeiro um resultado ou proposta uma teoria, que é bem construída e leva a resultados (provados) importantes, qualquer subjetividade do pesquisador não irá afetar tais conquistas. No entanto, é a criatividade do pesquisador e sua história que ajuda a impulsionar o desenvolvimento desta ciência, algo que, segundo Bacon, deve ser afastado.

Indiferentemente do método utilizado, a construção do conhecimento matemático se dá pela construção de teorias e o seu desenvolvimento. Dessa forma, teorias ou corpos teóricos, são constituídos por conceitos e resultados, sendo que todo resultado deve ser provado verdadeiro ou, como chamado na Matemática, o resultado é "demonstrado". Isto não significa que não é possível supor um resultado, mas apenas que este só será considerado verdadeiro a partir do momento em que se encontrar uma demonstração que o prove verdadeiro[11]. As demonstrações de enunciados matemáticos possuem as seguintes características:

> [...] são as únicas aceitas pelos matemáticos; respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas; trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência (ALMOULOUD, 2007, p. 3).

Segundo Almouloud (Ibidem, p. 2), "Usualmente, consideramos a *demonstração* como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais [...]". Assim, na Matemática se apresenta uma perspectiva contrária a filosofia das ciências empíricas, uma vez que existem verdades absolutas, afinal, uma vez demonstrado um resultado este será verdadeiro dentro do seu conjunto de hipóteses, definições e resultados anteriores. Desta forma, temos outro contraponto da Matemática quanto a algo que é muito discutido na filosofia e história das ciências: a Matemática é uma ciência cumulativa dentro dos seus diversos campos de conhecimento, isto é, o desenvolvimento do conhecimento matemático de um campo se dá de forma que o conhecimento novo corrobora conhecimentos anteriores e, ainda que resultados de áreas distintas sejam contraditórios, esses continuam sendo verdadeiros dentro dos seus campos de restrição[12].

---

[11] Ainda hoje existem problemas matemáticos que não possuem demonstração de que são verdadeiros ou não. Tais problemas são ditos problemas em aberto e, alguns, são conhecidos como problemas do milênio (problemas muito antigos, sem prova de sua veracidade e que possuem prêmio pela sua resolução).

[12] Por exemplo, na geometria plana/euclidiana é provado que não é possível existir um triângulo com dois ângulos de noventa graus, no entanto, na geometria hiperbólica (é uma geometria não euclidiana) podemos construir tal objeto matemático. No entanto, os dois resultados não se contradizem, uma vez que estão em campos do conhecimento matemático distintos. Assim, os dois campos podem continuar coexistindo e se desenvolvendo, buscando a construção do conhecimento matemático dentro das suas restrições.

Na Matemática temos então diversas formas de se desenvolver a ciência, nenhuma como um grande método, único ou absoluto. Em geral, tais métodos estão relacionados com a lógica dedutiva, algo proposto por Popper, mas existe também um método indutivo utilizado na Matemática. Como já foi dito, vamos buscar caracterizar a indução matemática.

> O processo de demonstração conhecido por "indução matemática"[13] tem sido atribuído a Blaise Pascal (1632 – 1662) [...]. No entanto, num artigo publicado em 1909, [...], Giovanni Vacca atribui ao matemático italiano Francesco Maurolico (1494 – 1575) a derivação e uso do método de indução matemática [...] (MORGADO, 1990, p. 30).

Segundo Boyer e Merzbach (2011, p. 524), o matemático Giuseppe Peano, para fundamentar sua aritmética, determina três conceitos primitivos: zero, número e a relação "é sucessor de". Assim, estes devem satisfazer os seguintes axiomas[14]:
1) Zero é um número;
2) Se a é um número, o sucessor de a é um número;
3) Zero não é sucessor de um número;
4) Dois números cujos sucessores são iguais, são eles próprios sucessores iguais;
5) Se um conjunto S de números contém o zero e também o sucessor de todo número de S, então todo número[15] está em S.

O último axioma também é conhecido como *Princípio de Indução*, já apresentando um indicativo de que no processo da indução matemática, existe uma relação entre o processo e o conjunto dos números naturais. Assim, a indução matemática "[...] é usada somente em Matemática para demonstrar teoremas de um certo tipo" (MORGADO, 1990, p. 23).

O tipo de resultado em que podemos aplicar a demonstração usando a indução matemática, ao qual Morgado se refere, são resultados nos quais conseguimos estabelecer uma relação com o conjunto dos números naturais, para que se possa utilizar o princípio da indução. Isto significa, em outras palavras, que nem toda demonstração pode ser feita utilizando a indução matemática, tanto pelo conteúdo como pela área do que se quer demonstrar. Desta forma, para casos em que podemos aplicar tal método, se verificado os seguintes passos, a indução será verdadeira:

a) Verificamos se o primeiro caso da indução é verdadeiro;
b) Supomos que para um caso qualquer (n) vale a indução;
c) Verificamos se para o próximo caso $(n+1)$ também vale a indução.[16]

Isto significa, colocando em termos mais simples, que se considerarmos que a indução é verdadeira (b) para um caso qualquer e verificarmos que também é verdadeira para o próximo caso (c) (o sucessor do caso anterior), temos que sempre que a afirmação for verdadeira para um caso, ela também será para o próximo. Então se o primeiro caso da indução for verdadeiro (a), temos que o segundo caso também será verdadeiro; como o segundo caso é verdadeiro, o terceiro caso também será verdadeiro e assim por diante, ou seja, se valer para o n-ésimo caso, também valerá para o caso $n+1$. Desta forma se verificado que é verdadeiro para o primeiro caso, temos que todos os casos da indução serão verdadeiros.

---

[13] Segundo Morgado (1990, p. 30), o termo "indução matemática" é mais recente que o seu uso na história. Ainda conforme esse autor, o termo estaria atribuído a Augustus de Morgan, em 1838.

[14] "Na realidade, os axiomas conhecidos como axiomas de Peano, apresentados em 1889, são essencialmente devidos a Dedekind, em 1888, como o próprio Peano declarou" (MORGADO, 1990, p. 29).

[15] Aqui, para Peano, número é um número inteiro e não negativo, ou seja, Peano considera que "todo número" seja o conjunto dos números naturais $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

[16] (a) se relaciona com o primeiro axioma de Peano, a existência do número zero (ou a existência do primeiro caso); (b) e (c) seriam o segundo axioma de Peano, a validade do caso n implica na validade do caso $n+1$; o último axioma de Peano nos justifica então que a verificação de (c) e (a) implicam a validade de todos os casos.

Por exemplo, vamos verificar que se um número n pertence ao conjunto dos números naturais, então a soma dos n-primeiros números ímpares é dada por n^2. Se chamarmos de i_1 o primeiro número ímpar (sendo $i_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1$), i_2 o segundo número ímpar (sendo $i_2 = 3 = 2 \cdot 2 - 1$), i_3 o terceiro número ímpar (sendo $i_3 = 5 = 2 \cdot 3 - 1$), ..., i_n o n-ésimo número ímpar (sendo $i_n = 2 \cdot n - 1$), então o que queremos verificar é que $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = n^2$. Vamos verificar se os itens (a), (b) e (c) são satisfeitos:

a) Podemos considerar que o primeiro caso é o número $n = 0$. Para isto, temos que verificar que a soma dos n-primeiros números ímpares é igual a n^2. Como $n = 0$, não estamos tomando nenhum número ímpar, então como a soma de nenhum número é sempre zero, temos que $0 = 0^2 = n^2$. Sendo o item verdadeiro. Contudo, como este caso é muito simples, vamos considerar que o primeiro caso seja $n = 1$. Assim, queremos verificar que a soma dos números ímpares até o primeiro (i_1) é igual ao nosso número $n = 1$ ao quadrado, ou seja, $i_1 = 1^2$. Como $i_1 = 1$ e $n = 1$ temos que $i_1 = 1 = 1^2$. Estando verificado o primeiro caso[17];

b) Agora, supomos que para um caso qualquer (n) a afirmação é verdadeira, ou seja, que é verdadeira a igualdade $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = n^2$;

c) Por fim, vamos verificar que a afirmação também será válida para o próximo caso ($n + 1$), ou seja, que é verdadeira a igualdade $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n + i_{n+1} = (n + 1)^2$. Sabemos do item (b) que $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = n^2$ e da definição de número ímpar que $i_{n+1} = 2 \cdot (n + 1) - 1$, assim, como é possível verificar na imagem a seguir, a igualdade é verdadeira.

$$\begin{aligned}\overbrace{i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n} + i_{n+1} &= n^2 + \overbrace{2 \cdot (n+1) - 1} \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{aligned}$$

Figura 1 – Terceiro passo para a verificação da indução.
Fonte: elaborado pelos autores.

Como foram verificados os itens (a) e (c), a partir da suposição de (b), temos que a indução é verdadeira, pois como vale para o primeiro caso, valerá para o segundo, e então para o terceiro e assim por diante. Portanto, para um número natural n qualquer vale que $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = n^2$, sendo i_m, o m-ésimo número ímpar, para $m = 1,2, \dots, n$.

Em uma perspectiva superficial de indução empírica, teríamos que realizar a observação de que a afirmação é verdadeira para um certo número de casos. Por exemplo, verificaríamos que para $n = 1$ temos que $1^2 = 1 = i_1$, para $n = 2$ temos que $2^2 = 4 = i_1 + i_2$, para $n = 3$ temos que $3^2 = 9 = i_1 + i_2 + i_3$, para $n = 4$ temos que $4^2 = 16 = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$,..., para $n = 10$ temos que

$$\begin{aligned}10^2 &= 100 \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 \\ &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 + i_{10}.\end{aligned}$$

Poderíamos verificar tantos outros casos, no entanto permaneceríamos com uma observação de finitos casos e inferiríamos, a partir do que foi visto, que a afirmação seria então verdadeira para todo número n. Esta seria a diferença marcante entre os dois métodos, enquanto

[17] Para melhor compreender: se fôssemos considerar que o primeiro caso fosse $n = 2$, teríamos que verificar se $i_1 + i_2 = 2^2$, então teríamos $i_1 + i_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

em um deles, na indução empírica, a observação de finitos casos leva a suposição/afirmação de uma conclusão, no outro, temos a verificação de que todos os casos serão verdadeiros, levando a certeza de que a afirmação proposta pela indução é verdadeira.

> É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número, necessariamente finito, de experimentos, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. [...] Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira (HEFEZ, 2009, p. 7).

Isto não significa que na busca pelo conhecimento matemático não se faça uso da observação de casos em que a afirmação é verdadeira. Isto é muito utilizado para a busca de padrões e formulação de hipóteses e teoremas, no entanto estes últimos só serão aceitos como verdade quando demonstrados por algum método, não necessariamente o de indução matemática. Segundo Morgado (1990, p. 29), "os matemáticos, a partir das observações feitas, concluem somente que tais observações dão forças à sugestão de que talvez seja válido". Polya (2006, p. 106) contribui para isto dizendo que "[...] muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental". Já para Sominski:

> A indução (ou seja, a sugestão de uma ideia ou uma hipótese) sem dúvida desempenha na Matemática um papel importante, mas puramente heurístico: permite adivinhar qual deve ser, segundo todas as aparências, a solução. Mas as proposições matemáticas são demonstradas sempre dedutivamente. Nenhum resultado matemático pode ser considerado verdadeiro, válido, se não foi deduzido das proposições de partida (SOMINSKI, 1996, p. 58).

Temos então outro distanciamento entre a indução empírica e a indução matemática, uma vez que a segunda prevê o processo dedutivo durante o desenvolvimento do método, não sendo assim um método inteiramente indutivo como a proposta por Bacon. De acordo com Morgado (1990, p. 29), "a passagem de n para $n+1$ é a fase dedutiva da indução matemática, é a passagem essencial da indução matemática [...] da validade suposta para um dado n, deduz-se a validade para $n+1$".

No entanto, como já foi dito, por mais que o método seja muito utilizado na Matemática, nem sempre podemos utilizá-lo como ferramenta para a verificação de um resultado, pela condição de se relacionar com os números naturais (ou os axiomas de Peano). Por exemplo, quando Pitágoras propõe que para um triângulo retângulo qualquer, com hipotenusa A, catetos B e C, vale a relação $A^2 = B^2 + C^2$, para que tentemos utilizar a indução matemática aqui, teríamos que estabelecer uma relação entre os triângulos e os números naturais, ou seja, teríamos que ordenar/enumerar todos os triângulos retângulos (triângulo 1, triângulo 2 etc.). Como isto não é possível, visto que os lados do triângulo podem ser números reais positivos[18], não podemos tentar demonstrar tal resultado usando a indução matemática.

[18] O conjunto dos números reais é o conjunto formado pelos números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Na prática, é o conjunto dos números positivos e negativos, que podem possuir casas decimais depois da vírgula ou não, e que podem ser representados por uma fração com números inteiros ou não. O conjunto dos números reais possui muito mais elementos do que o conjunto dos números naturais e, por isso, não conseguimos estabelecer um processo de contagem biunívoco com o conjunto dos naturais, como a indução matemática determina (caso 1, caso 2, ..., caso n, caso n+1, ...).

Aspectos dos métodos indutivos no livro didático

Neste momento, buscaremos exemplos da utilização do método indutivo, suas concepções ou da ideia de generalização, em livros didáticos de Ciências e Matemática do nono ano do Ensino Fundamental. Tal escolha pelo ano letivo se deu por ainda termos nesse período o ensino de Ciências em uma única disciplina, e uma possibilidade mais ampla de conhecimentos matemáticos que, por sua vez, tornam mais propício a abordagem da indução envolvendo as diversas áreas. No entanto, vale ressaltar que não buscamos atribuir juízo de valor aos livros didáticos, apenas encontrar exemplos do uso de tais métodos. Assim, a escolha pelos livros não se deu de forma a tornar a amostra ampla, mas apenas para propiciar dois exemplares que apresentaram tais perspectivas para a análise e discussão.

Foram escolhidos dois livros: um de Ciências e outro de Matemática, ambos do nono ano do Ensino Fundamental, distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no estado de Santa Catarina. Para Ciências foi escolhido o livro do projeto Teláris, produzido pela editora Ática, com autoria de Fernando Gewandsznajder, intitulado *Ciências: matéria e energia*, de 2013, e que participou do PNLD de 2014. O livro de Matemática é de autoria de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, produzido pela editora Moderna, intitulado *Matemática - Imenes & Lellis*, de 2009, e que participou do PNLD de 2011.[19]Os livros, ainda que não sejam os mais atuais, foram adotados para a discussão por sua proximidade temporal, bem como por sua disponibilidade, uma vez que a pesquisa foi realizada em 2018 e nesse período os livros do PNLD de 2017 ainda estavam sendo utilizados em sala de aula, de modo que não se teve acesso a estes.

Iniciaremos a discussão acerca do livro de Gewandsznajder. Sendo assim, buscamos elementos que ressaltassem aspectos do método de indução empírica. Como o livro é dividido em duas partes, buscamos pelo menos um exemplo referente à Química e um exemplo referente à Física. Não encontramos, no desenvolvimento dos conteúdos, aspectos presentes na indução empírica, uma vez que estes são apresentados de forma direta, como conhecimento já estabelecido. Isto pode estar relacionado ao fato de que os conteúdos ministrados no nono ano de Ciências, do ensino fundamental, sejam limitados, uma vez que nesta disciplina são ensinados conteúdos de Física e Química, que estão presentes no livro didático, o que limita a abordagem dos conteúdos tanto em relação ao tempo de sala de aula, quanto em relação a complexidade da sua apresentação no livro. Buscamos por esses elementos em outros tópicos do livro didático, como atividades, exercícios e relação do conteúdo com o dia a dia.

No conteúdo de Química, mais especificamente na parte referente ao balanceamento de equações químicas, ao fim do conteúdo é apresentado um tópico de relação da ciência com o dia a dia para o estudante, para então seguir para o conteúdo de reações químicas. Neste tópico é abordado o tema “ferrugem”. Nele é explicado que “a ferrugem se forma por causa de uma reação química entre o ferro, a água e o oxigênio do ar” (GEWANDSZNAJDER, 2013, p. 134). O tópico segue como é mostrado na figura abaixo.

[19] O livro também compôs o PNLD de 2014, mas não tivemos acesso a versão mais atual deste.

Um experimento simples pode demonstrar que o gás oxigênio e a água participam da reação de formação da ferrugem. Observe a figura 10.7.

No primeiro tubo, os pregos que contêm o ferro estão em contato com a água e com o gás oxigênio (presente no ar e dissolvido na água). O resultado é que os pregos enferrujam. No segundo tubo, fechado, há uma substância higroscópica, isto é, uma substância que absorve a umidade do ar (por exemplo, sílica gel). Nesse tubo, o ferro está em contato com o oxigênio, mas toda a água foi absorvida pela substância higroscópica e, por isso, não há formação de ferrugem. No terceiro tubo, os pregos foram mergulhados em água destilada, isto é, em água pura, sem oxigênio dissolvido nela. Acima da água foi colocada uma camada de óleo e o tubo foi fechado com uma rolha. Nesse tubo, não houve contato do ferro com o oxigênio do ar. Portanto, também não houve formação de ferrugem. Finalmente, no último tubo, os pregos foram mergulhados em água salgada. Nesse último tubo, a ferrugem aparece mais rapidamente, porque, além de estar em contato com água e oxigênio do ar, a presença de íons, como os íons sódio e cloro, acelera a formação de ferrugem.

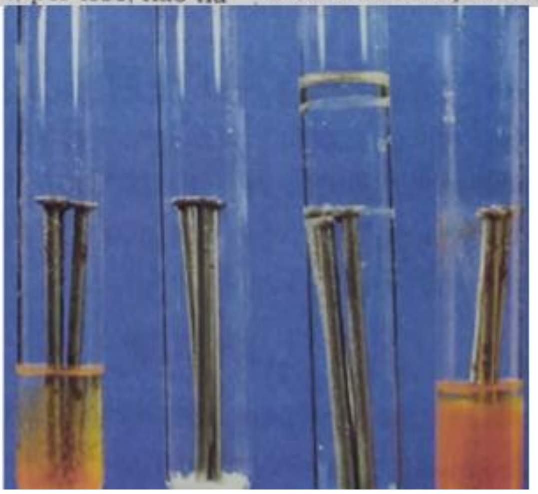

Figura 2 – Exemplo no livro de Ciências abordando a “ciência no dia a dia”.
Fonte: Imagem elaborada pelos autores a partir da página de Gewandsznajder (2013, p. 134).

A atividade envolvendo a formação de ferrugem no prego não apresenta uma proposta em que há o foco na repetição de um mesmo experimento para a verificação de um padrão, mas objetiva a observação do fenômeno em diferentes circunstâncias, o que levaria a obtenção de dados empíricos para a indução de como se forma a ferrugem no ferro. Podemos notar que são apresentados os casos da verificação de quando a observação é falha, ou seja, a verificação de que apenas o oxigênio do ar ou que apenas a água (destilada) não formam a ferrugem, mas sim a combinação de ambos. Poderíamos aqui fazer uma analogia ao proposto por Bacon (2003), uma vez que são eliminadas as hipóteses de que apenas um dos elementos seria responsável pela formação da ferrugem. Podemos notar que, ao fim do experimento, se espera que o estudante perceba que a ferrugem é formada pela interação da água e do oxigênio com o ferro, mas que outros elementos podem contribuir para que esta reação ocorra de forma mais rápida. Deste modo, temos aqui a presença da formulação de uma generalização, que vai além da expectativa inicial, formulada com base nos dados empíricos obtidos a partir observação do fenômeno nas quatro condições distintas.

Em seguida, apresentamos uma proposta de atividade prática dentro do conteúdo de Física do livro didático, no fim do capítulo referente a forças, após os exercícios propostos. A atividade está relacionada com as leis de Newton, de inércia e de ação e reação.

Pegue uma moeda pequena, um cartão ou pedaço de cartolina bem liso e um copo, arrumando-os como mostra a figura 13.31. A seguir, dê um "peteleco" na cartolina, de forma que a força aplicada seja perfeitamente paralela à cartolina. Explique o que acontece com a moeda utilizando um conceito da Física que você aprendeu neste capítulo.

Figura 3 – Atividade prática no livro de Ciências referente a forças.
Fonte: Gewandsznajder (2013, p. 191).

Novamente, não é apresentada uma proposta de realização do experimento diversas vezes, ou em diferentes circunstâncias, para a posterior configuração de uma conclusão a partir das observações. Contudo, este é um experimento que pode ser realizado mais de uma vez, já que erros de execução podem ocorrer. Aqui, a proposta da atividade é de que se perceba, pela observação do resultado do experimento, de que a força do "peteleco" faz com que a cartolina se mova, mas a moeda, que não é alvo da força diretamente, tende a permanecer parada e cair dentro do copo (força gravitacional), pois estava em repouso. No entanto, possivelmente se observaria que a moeda também se desloca na horizontal, mas com menor intensidade do que a cartolina, levando o estudante a perceber que a força aplicada sob a cartolina também iria afetar a moeda, podendo se concluir que algo também puxou a moeda (força de atrito). Assim, a observação deste experimento, assim como do truque de puxar uma toalha abaixo de diversos utensílios, poderia levar a coleta de dados e a formulação de hipóteses como: se A e B são dois objetos, sendo que B está sobre A, e uma força é aplicada sobre A horizontalmente, A se deslocará na direção da força aplicada e, se a força for suficientemente grande, B tenderá a permanecer parado e cair; se a força não for suficientemente grande, B irá se deslocar na mesma direção de A, com igual ou menor intensidade. Tal proposta, no livro didático, é feita de forma a se abordar e discutir a lei da inércia.

Ainda no conteúdo de Física, referente ao capítulo de atração gravitacional, na última atividade prática proposta no capítulo, temos a ideia de um experimento que prevê sua repetição, de forma a se observar a mudança de um evento. A repetição não ocorre sempre nas mesmas condições, uma vez que a atividade indica que cada vez vá se aplicando mais sal à mistura.

Procedimentos

- Mergulhe o ovo cru no copo com água e registre o que acontece. (Ele afunda ou flutua?)
- Tire o ovo e coloque uma colher das de café de sal. Misture e observe. Repita o procedimento, colocando um pouquinho de sal, até que o ovo fique flutuando com uma pequena parte fora da água.

a) Usando os conceitos de empuxo, peso e densidade, explique o que aconteceu.
b) O professor disse que se tivéssemos misturado álcool à água, em vez de sal à água, isso não ocorreria. Por quê? (Dica: o álcool é menos denso do que a água.)
c) Por que é mais fácil boiar no mar do que em um lago de água doce?

Figura 4 – Atividade prática no livro de Ciências referente à gravitação.
Fonte: Gewandsznajder (2013, p. 206).

Nessa proposta, as diversas observações do fenômeno estão atreladas à modificação da circunstância. Assim, não podemos dizer que a repetição do experimento busque a observação do fenômeno diversas vezes, mas, sim, sua observação em diferentes condições. Aqui, é esperado que o estudante perceba que nas primeiras aplicações o ovo afunda e, que na medida em que adicionamos sal à água, ele irá flutuar, pois a densidade da mistura de água e sal mudará, fazendo com que o empuxo supere o peso do ovo. Nessa primeira parte as observações levariam em consideração o conhecimento de Química do estudante sobre densidade, visto anteriormente no livro didático, algo previsto no método de indução empírica, ou seja, a observação vinculada ao conhecimento já adquirido. Tal conhecimento, junto aos dados do experimento, poderiam levar o estudante a induzir que elementos mais densos ficam abaixo, pois seu peso é maior que o empuxo gerado pela água. Na busca por uma regra geral em relação ao evento, o estudante deveria por fim observar que a densidade da água doce e salgada são diferentes, sendo a água salgada mais densa, fazendo com que corpos estranhos tenham maior facilidade em flutuar na água salgada, uma vez que o empuxo gerado é maior.

Como era de se esperar, uma vez que o método de Bacon (2003) se destina para a produção científica, nenhum dos exemplos encontrados no livro de Ciências propunha o posicionamento do pesquisador no viés do autor, ou seja, propor o afastamento dos *ídolos* e a posição do pesquisador mais passivo, afinal esta não seria a proposta de um livro didático, ou do sistema de ensino em si, que busca formar o estudante em uma perspectiva crítica, ativa e participativa. Além disso, conseguimos notar que no livro didático há ênfase na observação de fenômenos em diferentes contextos, em que variações das circunstâncias são realizadas para demonstrar as regularidades e variáveis dependentes nos fenômenos.

Para a abordagem do método de indução matemática, encontramos no conteúdo referente à operação de potenciação, em meio aos problemas e exercícios propostos no livro didático, um problema que trabalha com a ideia de generalização e que melhor representa aspectos do método indutivo no livro didático. Aqui, vale o destaque que o próprio livro apresenta o termo “generalize” no enunciado e que, ao lado da atividade, pede ao estudante para pesquisar o significado de generalização. Já na atividade, é pedido que o estudante observe os triângulos formados por triângulos menores, de forma a se estabelecer uma relação de dependência entre o lado do triângulo maior e a quantidade de triângulos menores.

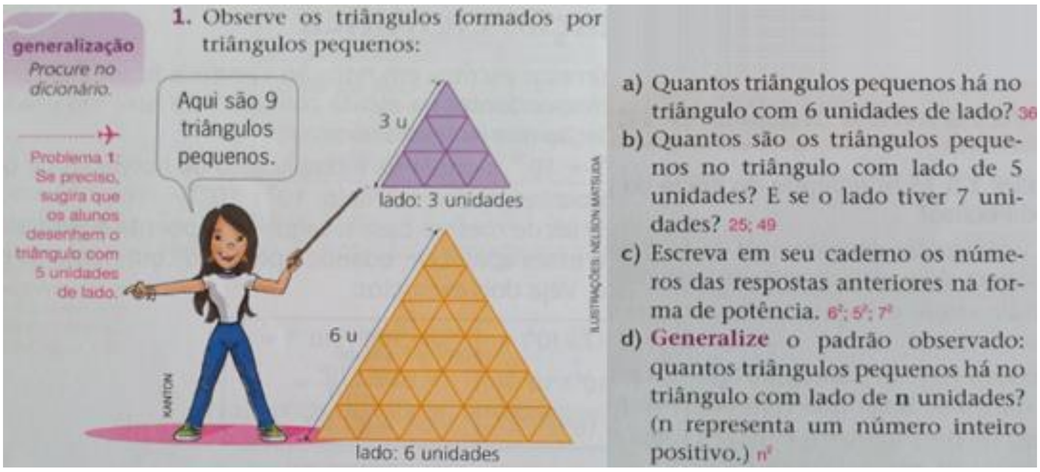

Figura 5 – Exercício de generalização no livro de Matemática.
Fonte: Imagem elaborada pelos autores a partir da página de Imenes e Lellis, (2009, p. 42).

Nesta atividade, o estudante parte da observação da relação entre a quantidade de triângulos pequenos e a quantidade de unidades do lado do triângulo maior, nos casos apresentados na forma de figura (lados com 3 e 6 unidades) e em casos especificados no enunciado (lados com 5 e 7 unidades). Em seguida, busca-se um padrão de repetição entre cada caso e, a partir disso, a generalização para um caso qualquer em que o triângulo maior possui lado com n unidades. Claramente não se tem como objetivo que o estudante tenha a noção de como mostrar que a generalização obtida é verdadeira, ou seja, que o método de indução matemática mostra que serão n^2 triângulos pequenos, mas sim que este perceba que é possível estipular um padrão de repetição e obter uma conclusão a partir disto. Ainda assim, a indução matemática poderia ser utilizada para mostrar que a conclusão obtida é verdadeira.

Para a demonstração de tal questão utilizando a indução matemática, podemos considerar que o primeiro caso é o triângulo com lado medindo uma unidade ou, para evitar este caso óbvio, com lado medindo duas unidades. Nos dois casos, temos que os triângulos possuem $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$ triângulos pequenos, respectivamente.

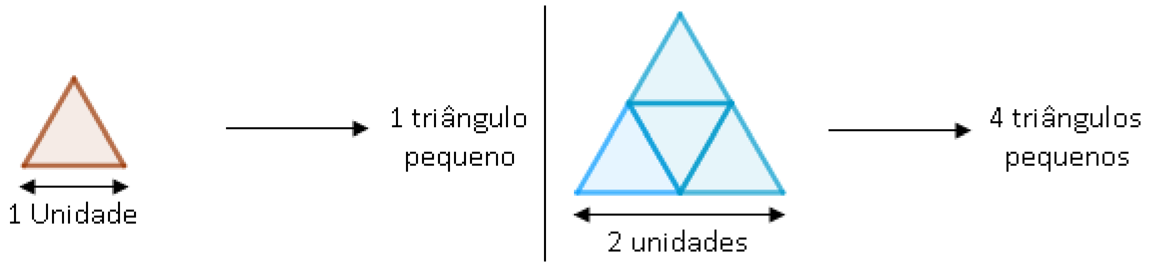

Figura 6 – Primeiro caso da indução matemática.
Fonte: elaborado pelos autores.

Supomos, então, que para o caso em que o lado mede n unidades temos que o triângulo possui n^2 triângulos pequenos. Agora queremos verificar se para o triângulo em que o lado mede $n + 1$ unidades teremos que este possui $(n + 1)^2$ triângulos pequenos.

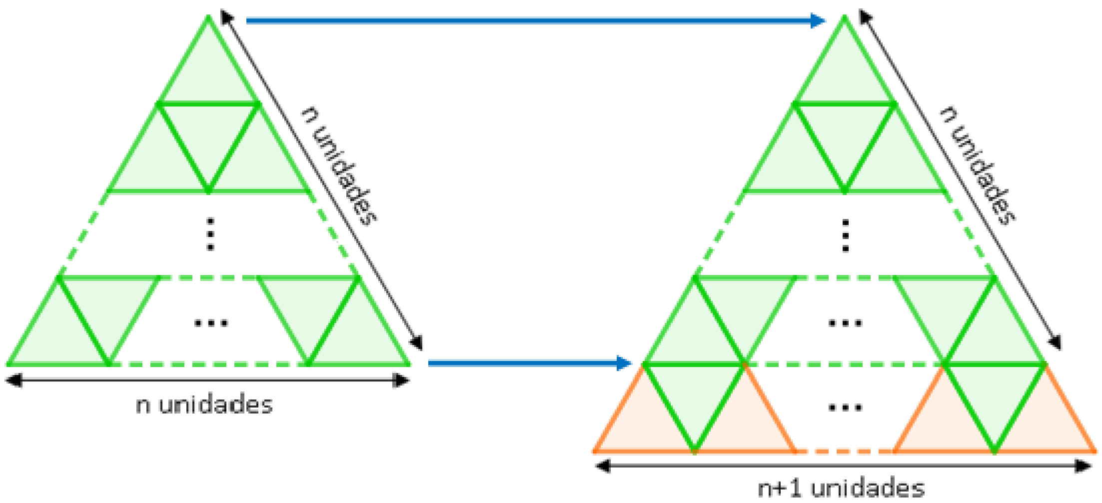

Figura 7 – Ilustração do caso n e do caso n+1.
Fonte: elaborado pelos autores.

Podemos notar, na base do triângulo com lado medindo $n + 1$ unidades, que foram adicionados n triângulos verdes (invertidos, em relação à base triângulo anterior) e mais $n + 1$

triângulos alaranjados para formar a base do triângulo maior. Assim, o triângulo com lado medindo $n+1$ unidades possui a quantidade de triângulos pequenos do triângulo anterior mais n triângulos verdes (invertidos) e $n+1$ triângulos alaranjados, ou seja, temos $n^2+n+n+1$ triângulos pequenos, ou ainda, $n^2+2n+1=(n+1)^2$ triângulos pequenos. Portanto, conseguimos verificar, usando a indução matemática, que a proposição é verdadeira, isto é, que um triângulo com lado medindo n unidades terá n^2 triângulos pequenos.

Constatamos assim que aspectos de ambos os métodos podem ser encontrados no livro didático. Em nossa pequena amostra, tais métodos tendem a ser utilizados em atividades ou exercícios, de forma a trazer a construção do conhecimento científico para prática ou na relação com o cotidiano. Todavia, não esperávamos encontrar o uso da indução empírica ou da indução matemática, como método científico, no livro didático, uma vez que essa proposta não seria apropriada para este nível de ensino.

Considerações finais

Na perspectiva de Bacon (2003), a indução empírica prevê a observação da natureza como um ponto de partida na busca de padrões para o processo indutivo e que o sujeito, e seus ídolos, devem ser omitidos neste processo. Da mesma forma, a indução empírica não faz uso da dedução, uma vez que na visão de Bacon a metafísica, aqui relacionada com o processo dedutivo pelo seu aspecto filosófico e de que vai além do real, tem menor valor que o real/empírico. Na perspectiva da indução matemática, proposições a serem demonstradas também podem surgir da observação de padrões, no entanto esse processo conta com a criatividade do pesquisador, uma vez que é a sua intuição que o levará a elaboração de uma proposição que possa ser submetida a uma tentativa de demonstração pela indução matemática. Neste processo, a metafísica se faz presente tanto no uso da dedução presente na indução matemática, quanto na elaboração de uma proposição ou nos elementos que o cientista trabalha, uma vez que todo elemento matemático faz parte do “mundo das ideias”.

Percebemos então que os dois métodos são diferentes, não apenas pela forma como estes são desenvolvidos e aplicados, mas também por seus objetos de estudo. A indução empírica preza pelo real e a indução matemática se debruça sobre objetos matemáticos, do âmbito das ideias. Contudo, se não pensarmos na indução matemática como um método dedutivo, ambos métodos possuem também suas semelhanças, uma vez que buscam uma generalização de um evento a partir de casos particulares e que a observação, dos objetos de cada uma, faz parte do processo de indução.

Verificamos ainda que é possível encontrar aspectos dos dois métodos indutivos nos livros didáticos analisados, tendo suas ressalvas, uma vez que os dois métodos de pesquisa são propostos para o desenvolvimento do conhecimento científico e não para o ensino básico. Tal uso de elementos dos métodos indutivos podem proporcionar ao estudante uma perspectiva diferente de como a ciência pode ser desenvolvida, uma vez que o conhecimento da área de Ciências, obtido pelo método indutivo, é cabível de falha e, na Matemática, o conhecimento obtido pela indução matemática é demonstrado de uma maneira muito diferente da comum, sendo que por vezes é a única forma de se demonstrar tal conhecimento matemático. Além disso, os métodos indutivos, ou elementos desses, podem contribuir de maneira significativa para a formação do estudante, uma vez que características como criatividade, observação e uso de saberes já adquiridos, são essenciais para o desenvolvimento de tais métodos.

Referências

ALMOULOUD, S. A. “Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem”. **Grupo de Educação Matemática GT**, v. 19, 2007.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BACON, F. **Novum Organum ou verdadeiras indicações acerca da interpretação da natureza.** Pará de Minas: Virtual Books Online, 2003.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 2003.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **A History of Mathematics.** New Jersey: Wiley, 2011.

CARMO, P. F. **Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental**. 2014. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo: PUC/SP, 2014.

CHALMERS, A. F. **O que é ciência afinal?** Tradução Raul Filker. São Paulo: Brasiliense, 1993.

DAMM, R. F. “Registros de representação”. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

DUVAL, R. “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática”. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2008.

GALVÃO, R. C. S. “Francis Bacon: teoria, método e contribuições para a educação”. **Revista Internacional INTERthesis - PPGICH**, Florianópolis, v. 4, p. 32-41, jul./dez. 2007.

GEWANDSZNAJDER, F. **Ciências**: matéria e energia. São Paulo: Ática, 2013.

HEFEZ, A. **Indução matemática.** Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**: Imenes & Lellis. São Paulo: Moderna, 2009.

LAUDAN, L. **O progresso e seus problemas**: rumo a uma teoria do crescimento científico. Tradução Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Unesp, 2011.

MORGADO, J. Indução e Indução Matemática. **Boletim da SPM**, n. 17, 1990.

OLIVA, A. “A hegemonia da concepção empirista de ciência a partir do *Novum ORGANUM* de F. Bacon”. In: OLIVA, A. (Org.). **Epistemologia: a cientificidade em questão.** Campinas: Papirus, 1990.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POPPER, K. R. **A lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Cultrix, 1972.

RAICIK, A. C.; PEDUZZI, L. O. Q.; ANGOTTI, J. A. P. “Experimentos Exploratórios e Experientia Literata: (Re) Pensando a Experimentação”. **IENCI,** Porto Alegre, v. 23, n. 1, p. 111-129, 2018.

SOMINSKI, I. S. **Método de indução matemática**. Tradução Gelson Iezzi. São Paulo: Atual, 1996.

SILVA, F. M. “Sobre a indução em Francis Bacon”. **Revista Urutágua,** Maringá, n. 14, p. 1-17, 2008.

ZATERKA, L. “As teorias da matéria de Francis Bacon e Robert Boyle: forma, textura e atividade”. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 10, n. 4, p. 681-709, 2012.